

A boa estratégia consiste em cada preso começar por espreitar na caixa com o seu próprio nome no rótulo e de seguida procurar a caixa cujo rótulo contenha o nome que viu dentro da primeira caixa e assim sucessivamente. Se vir o seu nome dentro de uma caixa, pára. Caso contrário continua até ter inspeccionado 50 caixas.

A colocação dos nomes dentro das caixas corresponde a uma permutação de 100 objectos. Com a estratégia acima todos os prisioneiros se salvam se essa permutação não contiver nenhum ciclo de ordem maior que 50.

Vejamus qual é a probabilidade de uma permutação de $2n$ elementos conter um ciclo de ordem superior a n . Seja $k > n$. Há $\binom{2n}{k}$ maneiras de escolher os elementos do ciclo, $(k-1)!$ formas de os ordenar e $(2n-k)!$ maneiras de ordenar os restantes $2n-k$ elementos.

Assim, o número de permutações de $2n$ elementos com um ciclo de comprimento $k > n$ é

$$\frac{(2n)!}{k!(2n-k)!}(k-1)!(2n-k)! = \frac{(2n)!}{k}.$$

A probabilidade de obter um ciclo de ordem k é então $1/k$.

A probabilidade de, numa permutação qualquer, não aparecer um ciclo de comprimento k para $k = n+1, \dots, 2n$, é

$$1 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \dots - \frac{1}{2n}.$$

Para $n = 100$ obtemos um valor acima dos 31%.